# P6.2 – EP1 - Mécanique Quantique : Applications

**Contrôle continu du 05/03/2019**

Une particule de masse $m$ est confinée dans un potentiel harmonique isotrope à trois dimensions

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \quad , \tag{13}$$

où $\vec{r} = (x,y,z)$ **est le vecteur position de la particule.**

On voudrait résoudre l'équation aux valeurs propres : $\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$ par la méthode de la séparation des variables. C'est-à-dire, on cherche des solutions particulières factorisées, de la forme :

$$\Psi(\vec{r}) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z) \quad . \tag{14}$$

**1)** Montrer que $\Psi(\vec{r})$ est solution de l'équation de Schrödinger pour la valeur $E$ si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_i^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x_i^2\right]\psi_i(x_i) &= E_i\psi_i(x_i) \quad , \\ E &= E_1+E_2+E_3 \end{aligned} \tag{15}$$

et $x_i = x, y, z$ pour $i = 1, 2, 3$. Conclure.

**2) Question de cours :** Donner l'expression de l'énergie d'un oscillateur harmonique quantique à une dimension.

**2-a)** En déduire l'expression de $E$ (on notera les trois nombres quantiques $n_1$, $n_2$ et $n_3$).

**2-b)** Combien de fonctions d'ondes différentes ont le niveau d'énergie $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$.

**3)** Montrer que

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(\pi a^2)^{3/4}}\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \quad , \tag{16}$$

où $a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ est solution de l'équation de Schrödinger. Quelle est l'énergie de cet état ?

**4)** Comment évolue cet état dans le temps ?

**5)** Que deviennent les résultats des questions **1)**, **2-a)** et **3)** pour un oscillateur anisotrope de potentiel

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2\right) \quad ? \tag{17}$$

**6) Question de cours :** En coordonnées sphériques, de quelles variables dépendent les opérateurs du moment angulaire $\hat{L}_z$ et $\hat{L}^2$. En déduire les valeurs de $l$ et $m$ de l'état donné en (16).

**7) Question de cours :** Une autre fonction d'onde de l'oscillateur harmonique isotrope est donnée par

$$\Psi_l(\vec{r}) = C \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)\left(r^l - \frac{2r^{l+2}}{a^2(2l+3)}\right) \quad , \tag{18}$$

où $C$ est une constante et $l$ est le nombre quantique du moment angulaire (la valeur de l'énergie est $E = \hbar\omega(l + \frac{7}{2})$). Comment modifier cette fonction d'onde pour quelle soit aussi fonction propre des deux opérateurs du moment angulaire $\hat{L}_z$ et $\hat{L}^2$ ?