1) Equation de Schrödinger :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)\right]\psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z)$$

$$=E\,\psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z)$$

avec $\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

On agit avec $\vec{\nabla}^2$ et on divise toute l'équation par $\psi_1\psi_2\psi_3$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]}_{=E_1}+\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_2''(y)}{\psi_2(y)}+\frac{1}{2}m\omega^2y^2\right]}_{=E_2}$$

$$+\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_3''(z)}{\psi_3(z)}+\frac{1}{2}m\omega^2z^2\right]}_{=E_3}=E$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_i''(x_i)}{\psi_i(x_i)}+\frac{1}{2}m\omega^2x_i^2=E_i\\ E_1+E_2+E_3=E\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi_i''(x_i) + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x_i^2\,\varphi_i(x_i) = E_i\,\varphi_i(x_i) \\ E = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}$$

Conclusion : On a trois oscillateurs harmoniques à une dimension, totalement indépendants.

2) $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

2-a) Pour trois oscillateurs indépendants

$$E = (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})\hbar\omega$$

2-b)

i) $E = \frac{5}{2}\hbar\omega \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0 \\ n_2 = 1, n_1 = 0, n_3 = 0 \\ n_3 = 1, n_1 = 0, n_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ trois états ayant la même énergie.

ii) $E = \frac{7}{2}\hbar\omega \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} (n_1 = 2, n_2 = 0, n_3 = 0), (n_2 = 2, n_1 = 0, n_3 = 0), (n_3 = 0, n_1 = 0, n_2 = 0) \\ (n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0), (n_1 = 1, n_3 = 1, n_2 = 0), (n_2 = 1, n_3 = 1, n_1 = 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L'état est 6 fois dégénéré.

3)

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}} e^{-r^2/2a^2} = \frac{1}{\pi^{3/4}} e^{-\frac{1}{2a^2}(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(x) = \dfrac{1}{(a^2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \\ \psi_2(y) = \dfrac{1}{(a^2\pi)^{1/4}} e^{-y^2/2a^2} \\ \psi_3(z) = \dfrac{1}{(a^2\pi)^{1/4}} e^{-z^2/2a^2} \end{cases}$$

$\psi_1(x)$ doit satisfaire

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_1''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi_1 = E_1 \psi_1(x) \quad -①-$$

$\Rightarrow$

$$\psi_1' = -\frac{1}{(a^2\pi)^{1/4}} \frac{2x}{2a^2} e^{-x^2/2a^2} = -\frac{x}{a^2} \times \psi_1(x)$$

$$\psi_1'' = -\frac{1}{a^2}\psi_1 - \frac{x}{a^2}\psi_1' = -\frac{1}{a^2}\psi_1 + \frac{x^2}{a^4}\psi_1$$

Dans ① $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{a^2}\psi_1+\frac{x^2}{a^4}\psi_1\right)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E_1\psi_1$$

or $a=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ $\Rightarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\psi_1+\cancel{\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi_1}\right)+\cancel{\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_1}$$

$$=E_1\psi_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\hbar\omega\,\psi_1=E_1\psi_1 \Rightarrow E_1=\frac{1}{2}\hbar\omega$$

Même chose pour $\psi_2(y)$ et $\psi_3(z)$ et on trouve $E_2=\frac{1}{2}\hbar\omega$ et $E_3=\frac{1}{2}\hbar\omega$

Donc l'énergie de cet état est

$E=\frac{3}{2}\hbar\omega$ (qui correspond à $n_1=n_2=n_3=0$ = état fondamental).

4)

$$\psi(\vec{r},t)=C\,e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\,e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$$

⑤

6) $\hat{L}_z$ et $\hat{L}^2$ ne font intervenir que des dérivées par rapport à θ et φ

$$\left(\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ ,\ \hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right)$$

Comme $\Psi(\vec{r})$ ne dépend que de r $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \hat{L}_z\Psi(\vec{r}) = 0 & \Rightarrow m = 0 \\ \hat{L}^2\Psi(\vec{r}) = 0 & \Rightarrow \ell = 0 \end{cases}$$

5)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2\right)$$

$\Rightarrow$

1)

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_i^2} + \frac{1}{2}m\omega_i^2 x_i^2\right]\Psi_i(x_i) = E_i\,\Psi_i(x_i) \\ E = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}$$

2-a) :

$$E = \left(\frac{1}{2} + n_1\right)\hbar\omega_1 + \left(\frac{1}{2} + n_2\right)\hbar\omega_2 + \left(\frac{1}{2} + n_3\right)\hbar\omega_3$$

3)
$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(a_1^2\pi)^{1/3}(a_2^2\pi)^{1/3}(a_3^2\pi)^{1/3}}\, e^{-\frac{x^2}{2a_1^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2a_2^2}}\, e^{-\frac{z^2}{2a_3^2}}$$

avec $a_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}}$, $i = 1, 2, 3$

L'énergie de cet état est

$$E = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3).$$

7) Il faudrait la multiplier par une harmonique sphérique.

$$\Psi_\ell(\vec{r}) \longrightarrow Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)\, \Psi_\ell(\vec{r}) \equiv \Psi_{\ell,m}$$

$$\begin{cases} \hat{L}^2\, \Psi_{\ell,m} = \ell(\ell+1)\hbar^2\, \Psi_{\ell,m} \\ \hat{L}_z\, \Psi_{\ell,m} = m\hbar\, \Psi_{\ell,m} \end{cases}$$