CHAPITRE 1

RAPPELS D'ANALYSE COMBINATOIRE

I Généralités

L'analyse combinatoire a pour but le **dénombrement des dispositions** que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble de cardinal fini. Plus simplement, elle cherche à déterminer comment on compte des objets ayant certaines propriétés.

Pour effectuer un dénombrement, il faut connaître l'ensemble sur lequel on travaille et le type de disposition souhaité.

- **L'ensemble étudié** : il peut être formé d'éléments discernables et/ou d'éléments indiscernables.
  - Si tous les éléments sont distinguables les uns des autres, on dit qu'ils sont **discernables**. On écrit alors $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. On a Card $E = n$.
    Exemple : les cartes à jouer, les numéros portés par des sportifs dans une épreuve, les numéros des candidats à un examen, etc …
  - Si les éléments sont tous identiques, on dit qu'ils sont **indiscernables**. On écrit encore, avec un abus de notation du point de vue purement mathématique, $E = \{a, a, \cdots, a\}$, avec Card $E = n$.
    Exemple : un ensemble de boules de la même couleur dans une urne.
  - Si l'ensemble comprend un mélange des deux types d'éléments, on écrit, de façon abusive,
    $E = \{\underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_1)}_{n_1}, \underbrace{(a_2, a_2, \cdots, a_2)}_{n_2}, \cdots, \underbrace{(a_k, a_k, \cdots a_k)}_{n_k}\}$, avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

  On a $\sum_{i=1}^{k} n_i = n = \text{Card } E$.

- **Les dispositions** : elles peuvent être $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{ordonnées} \text{ ou } \textbf{non-ordonnées}, \\ \textbf{avec} \text{ ou } \textbf{sans} \text{ répétition.} \end{array} \right.$
  Il faut donc considérer le nombre de fois où chaque apparaît dans un dénombrement donné, et sa position dans le dénombrement.

  Si chaque élément apparaît au plus une fois, la disposition est sans répétition,
  si un élément au moins a un nombre d'apparitions strictement supérieur à 1, on obtient une disposition avec répétition.

  Attention : toutes les dispositions ordonnées s'écrivent entre parenthèses,
  toutes les dispositions non-ordonnées s'écrivent entre accolades

  Exemples :
  - disposition ordonnée sans répétition : une liste de noms distincts rangés dans l'ordre alphabétique,
  - disposition non ordonnée sans répétition : les numéros gagnants du loto,

- disposition ordonnée avec répétition : un mot du dictionnaire contenant plusieurs fois une ou plusieurs lettres,
- disposition non ordonnée avec répétition : les lettres formant un mot du dictionnaire écrites dans un ordre quelconque.

- **Principe général d'un dénombrement** : toujours commencer par préciser la nature de l'ensemble E et la structure du de la disposition étudiée.

II Formules classiques

1) Multiplets

- Définition :
  Soient k ensembles $E_1, E_2, \cdots, E_k$ formés d'éléments complètement discernables, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ces ensembles sont supposés non vides, et on note Card $E_i = n_i$.

> Un **multiplet** est une disposition ordonnée de k éléments $a_1, a_2, \cdots, a_k$ tels que $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, $\cdots$, $a_k \in E_k$. On l'écrit $\boldsymbol{(a_1, a_2, \cdots, a_k)}$.

- Valeur :

> Le nombre de multiplets que l'on peut former est alors $n_1 * n_2 * \cdots * n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$.

Cas particulier : les paires. On a alors $k = 2$.

2) Arrangements avec répétition

Soit un ensemble non vide $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, formé d'éléments discernables. Card $E = n$.

- Définition :

> On appelle **arrangement avec répétition** de p éléments parmi n toute disposition ordonnée avec répétition éventuelle formée de p éléments pris parmi les n de E.

Exemple : $(a_1, a_3, a_3, \cdots, a_p)$.

- Valeur :

> Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est $\mathcal{A}_n^p = n^p$.

3) Arrangements sans répétition

Soit un ensemble non vide $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, formé d'éléments discernables. Card $E = n$.
Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

- Définition :

> Un **arrangement sans répétition**, ou tout simplement arrangement, de p éléments parmi n est toute disposition ordonnée de p éléments deux à deux distincts pris parmi les n de E.

- Valeur :

> Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple : le nombre de façons de tirer 3 cartes sans remise et en tenant compte de l'ordre dans un jeu de 32 cartes est $A_{32}^3 = 32 * 31 * 30 = 29760$.

4) Permutations sans répétition

Soit un ensemble non vide $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, formé d'éléments discernables. Card $E = n$.

- Définition :

> On appelle **permutation sans répétition**, ou simplement permutation, des n éléments de E toute disposition ordonnée sans répétition de ces n éléments.

- Valeur :

> Le nombre de permutations de ces n éléments est $P_n = n!$.

Exemple : le nombre des permutations des 3 éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est $3! = 6$.
Ces permutations sont : $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$.

5) Permutations avec répétition

- Définition

Soit $E = \{\underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_1)}_{n_1}, \underbrace{(a_2, a_2, \cdots, a_2)}_{n_2}, \cdots, \underbrace{(a_k, a_k, \cdots a_k)}_{n_k}\}$, avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

On note $n = \text{Card } E = \sum_{i=1}^{k} n_i$

L'ensemble E contenant des élements discernables et des élements indiscernables, toute permutation de ses élements sera forcément une **permutation avec répétition**.

- Valeur :

> Le nombre de permutations avec répétition des éléments de l'ensemble E s'écrit : $\mathcal{P} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$. Il dépend des valeurs des n_i.

Exemple : soit $E = \{a, a, a, b, b\}$. Dans ce cas, $\mathcal{P} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Vérification : les permutations que l'on obtient sont :
$(a, a, a, b, b), (a, a, b, a, b), (a, a, b, b, a), (a, b, a, a, b), (a, b, a, b, a), (a, b, b, a, a), (b, a, a, a, b), (b, a, a, b, a), (b, a, b, a, a), (b, b, a, a, a)$.

6) Combinaisons sans répétition

Soit un ensemble non vide $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, formé d'éléments discernables. Card $E = n$.
Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

- Définition :

> Une **combinaison sans répétition**, ou tout simplement combinaison, de p éléments parmi n est toute disposition non-ordonnée de p éléments deux à deux distincts pris parmi les n de E.

On l'écrit entre accolades, par exemple $\{a_1, a_2, a_5\}$ si $p = 3$.

- Valeur :

> Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est :
> $C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$.

Exemple : le nombre de combinaisons sans répétition de 2 éléments parmi les 5 de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est $C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5*4}{2} = 10$.
Vérification : ces combinaisons sont :
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$.

7) Combinaisons avec répétition

Soit un ensemble non vide $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, formé d'éléments discernables. Card $E = n$.

- Définition :

> On appelle **combinaison avec répétition** de p éléments parmi n toute disposition non ordonnée avec répétition éventuelle formée de p éléments pris parmi les n de E.

Exemple : $\{a_1, a_3, a_3, \cdots, a_k\}$.

- Valeur :

> Le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n est :
> $K_n^p = C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$.

Exemple : le nombre de combinaisons avec répétition de 2 éléments pris dans $\{1,2,3\}$ est $K_3^2 = 6$.
Vérification : ces combinaisons sont $\{1,1\},\{2,2\},\{3,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.

Rappel : pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre appelé *factorielle* n et noté $n!$ est le produit des n premiers entiers non nuls $n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1) * n$. Par convention, $0! = 1$.
Ce nombre croît très vite lorsque n augmente. Par exemple, $10! = 3628800$. Dès que n dépasse 10, on utilise la formule d'approximation de Stirling : $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

III Propriétés des combinaisons C_n^p

1) La symétrie

Pour tous n et $p \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq n$, on a $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Valeurs à connaître :

$$C_n^0 = \binom{n}{0} = 1$$

$$C_n^1 = \binom{n}{1} = n$$

$$C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2) Le triangle de Pascal

Formule de Pascal :
Pour tous n et $p \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq n-1$, on a $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ (Réfléchir à une démonstration sans calcul).
On en déduit le triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Il en découle la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

En posant dans cette formule $a = b = 1$, on obtient $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

D'où la valeur de $Card\,\mathcal{P}(E)$, où E désigne un ensemble à n éléments :

$$\boxed{Card\,\mathcal{P}(E) = 2^n}$$

Remarque : on déduit un certain nombre de formules de la formule du binôme de Newton.

A titre d'exemple, on pourra essayer de démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$$