

# Chapitre 1

## Dualité

### Sommaire

---

<b>1.1 Formes linéaires</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1.2 Hyperplans</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.3 Bases duales</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>1.4 (*) Formes linéaires et sous-espaces vectoriels</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1.5 (*) Formes linéaires et applications</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.6 Exercices</b> . . . . .	<b>11</b>

---

Dans ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou plus généralement un corps commutatif) de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ , sauf mention du contraire. On rappelle que  $\mathbb{K}$  lui-même est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1 ; sa base canonique est (1).

$\delta$  désigne le symbole de Kronecker (Léopold Kronecker 1823–1891) :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En particulier, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base quelconque de  $E$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

### 1.1 Formes linéaires

**Définition 1.** 1. Une forme linéaire sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers  $\mathbb{K}$ . Usuellement une forme linéaire est désignée par une lettre grecque :  $\varphi$  (phi),  $\psi$  (psi),  $\theta$  (theta)...

2. L'ensemble des formes linéaires sur  $E$  s'appelle *l'espace dual* de  $E$  (ou plus simplement *le dual* de  $E$ ). On le note  $E^*$ .

En vertu de la définition, une forme linéaire  $\varphi$  est une application de  $E$  vers  $\mathbb{K}$  qui satisfait

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(u + \lambda v) = \varphi(u) + \lambda \varphi(v).$$

**Proposition 2.**  $E^*$  est un espace vectoriel pour l'addition des applications et la multiplication par un scalaire. Si  $E$  est de dimension finie,  $E^*$  l'est aussi et  $\dim(E^*) = \dim(E)$ . Et donc, dans ce cas,  $E^*$  est isomorphe à  $E$ .

Nous verrons par la suite (section 1.3) comment trouver des bases de  $E^*$  si  $E$  est de dimension finie. Remarquons également que, même si  $E$  et  $E^*$  sont isomorphes, il n'existe pas de manière canonique (c'est-à-dire indépendante de tout choix) de construire un isomorphisme entre  $E$  et  $E^*$ , ceci nécessite d'avoir à disposition d'autres objets (voir le chapitre 2). Le cas où  $E$  est de dimension infinie dépasse le cadre de ce cours.

*Preuve de la proposition 2.* On a que  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  donc  $E^*$  est muni d'une structure d'espace vectoriel. De plus, si  $E$  est de dimension finie,

$$\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \dim(\mathbb{K}) = \dim(E).$$

□

Pour montrer que  $E^*$  est un espace vectoriel, on aurait pu également voir que si  $\varphi, \psi \in E^*$  sont deux formes linéaires et  $\lambda \in \mathbb{K}$  un scalaire, l'application  $\varphi + \lambda\psi$  définie par

$$\forall u \in E, (\varphi + \lambda\psi)(u) = \varphi(u) + \lambda\psi(u)$$

est une forme linéaire. L'élément neutre de  $E^*$  est la forme linéaire nulle  $0_{E^*}$  :

$$\forall u \in E, 0_{E^*}(u) = 0_{\mathbb{K}}.$$

**Proposition 3.** Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ . Alors  $\varphi$  est surjective et  $\dim \text{Ker}(\varphi) = n - 1$ .

*Démonstration.* Donnons deux preuves de la surjectivité de  $\varphi$  :

1.  $\text{Im } \varphi$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}$  donc  $\text{rg } \varphi = \dim \text{Im } \varphi = 0$  ou 1. Si  $\text{rg } \varphi = 0$ ,  $\text{Im } \varphi = \{0_{\mathbb{K}}\}$  donc  $\forall u \in E, \varphi(u) = 0$ , autrement dit  $\varphi = 0_{E^*}$ , ce que nous avons exclu dans les hypothèses de la proposition. Donc  $\text{rg } \varphi = 1$  et  $\text{Im } \varphi = \mathbb{K}$ , c'est-à-dire  $\varphi$  surjective.
2. Puisque  $\varphi$  est non-nulle, il existe un vecteur  $u \in E$  tel que  $x := \varphi(u) \neq 0$ . Soit maintenant  $y \in \mathbb{K}$ , on cherche un vecteur  $v \in E$  tel que  $\varphi(v) = y$ . Or, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , si  $v = \lambda u$

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) = \lambda x.$$

En choisissant  $\lambda = y/x$  (cette opération est permise car  $x \neq 0$ ), on a donc

$$\varphi\left(\frac{y}{x}u\right) = \frac{y}{x}\varphi(u) = \frac{y}{x}x = y.$$

Ce qui montre que pour tout  $y \in \mathbb{K}$ , il existe  $v \in E$  tel que  $y = \varphi(v)$  :  $\varphi$  est surjective.

Pour démontrer le second point de la proposition, utilisons le théorème du rang appliqué à  $\varphi$  :

$$\dim E = \dim \text{Ker}(\varphi) + \text{rg } \varphi.$$

Nous avons  $\dim E = n$ , par définition, et nous avons vu, dans le premier point que  $\text{rg } \varphi = 1$ . Ceci montre que  $\dim \text{Ker}(\varphi) = n - 1$ .  $\square$

Donnons maintenant quelques exemples de références :

- Si  $E$  est un espace vectoriel quelconque de dimension  $n$  et si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on a, par définition

$$\forall u \in E, \exists!(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \sum_{i=1}^n u_i e_i.$$

Soit  $\varphi \in E^*$ . Comme  $\varphi$  est linéaire, on a

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi(e_i).$$

Ainsi  $\varphi$  est parfaitement déterminée par le n-uplet d'éléments de  $\mathbb{K}^n$

$$\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)),$$

l'image par  $\varphi$  de  $\mathcal{B}$  qui n'est autre que la matrice, de format  $(1, n)$ , de  $\varphi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  :

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

c'est l'écriture matricielle du scalaire  $\varphi(u)$ .

Dans le cas particulier où  $E = \mathbb{K}^n$  muni de sa base canonique

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, \dots, 1), \end{cases}$$

on a que  $\varphi \in E^*$  si et seulement s'il existe  $n$  scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$\varphi((x_1, \dots, x_n)) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

On a alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_i = \varphi(e_i)$  : les  $\alpha_i$  sont déterminés de manière unique par  $\varphi$ . Par exemple,

$$\varphi = 0_{E^*} \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0).$$

- Si  $E = M_n(\mathbb{K})$  est le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,  $\dim(E) = n^2$ . La base canonique de  $E$  est la base

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}),$$

formée des matrices élémentaires  $E_{kl}$  définies par  $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , avec  $\delta$  le symbole de Kronecker ( $E_{kl}$  est la matrice carrée de taille  $n$  ayant des zéros partout sauf un 1 à l'intersection de la  $k$ -ième ligne et de la  $l$ -ième colonne). L'application *trace*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \mapsto \text{tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{K})$ . En effet, pour toutes matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  et pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a

$$\text{tr}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B).$$

- Soit  $E = \mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leq n\}$  l'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$ . La base canonique de  $E$  est  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ , donc  $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{B}) = n + 1$ . Pour tout  $x \in \mathbb{K}$ , l'application  $\delta_x : P \mapsto P(x)$  est une forme linéaire sur  $E$  appelée *évaluation en  $x$* . Plus généralement, si  $x \in \mathbb{K}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on peut définir une forme linéaire sur  $E$  par

$$\psi_{x,k} : P \mapsto P^{(k)}(x) \tag{1.1.1}$$

(évaluation de la dérivée  $k$ -ième de  $P$  en  $x$ ). Remarquons que si  $k \geq n + 1$ ,  $\psi_{x,k} = 0_{E^*}$ .

- Soit  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $a$  et  $b$  deux réels,  $a < b$ . C'est un espace vectoriel de dimension infinie. L'application

$$I : f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

est une forme linéaire sur  $E$  grâce à la linéarité de l'intégrale. Et, comme précédemment, si  $x \in [a, b]$ , l'application  $\delta_x$  suivante est une forme linéaire :  $\delta_x : f \mapsto f(x)$ .

## 1.2 Hyperplans

**Définition 4.** On appelle hyperplan de  $E$  le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$  :

$$H \text{ hyperplan de } E \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, H = \text{Ker}(\varphi).$$

Par conséquent, un hyperplan  $H$  de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$  si  $\dim E = n$  (voir la proposition 3).

**Théorème 5.** Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $H$  est un hyperplan de  $E$ ,
- $H$  est un sous-espace vectoriel strict de  $E$  et  $\forall u \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K}u$ ,
- $\dim H = n - 1$ .

*Démonstration.* •  $i \Rightarrow iii$  : Si  $H$  est un hyperplan, soit  $\varphi \in E^*$  telle que  $H = \text{Ker}(\varphi)$ . On a vu (voir proposition 3) que  $\dim(H) = \dim \text{Ker}(\varphi) = n - 1$ .

- $iii \Rightarrow ii$  : On a  $\dim H = n - 1 < \dim E$  donc  $H$  est un sous-espace vectoriel strict de  $E$ .

Soit  $u \in E \setminus H$ . Posons  $F = \mathbb{K}u$ . Si  $v \in F \cap H$ ,  $v \neq 0$ , on a  $u = \lambda v$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  et, comme  $v \in H$ ,  $u = \lambda^{-1}v \in H$ , ce qui contredit le choix de  $u$ . Donc  $F \cap H = \{0_E\}$ . Par ailleurs, on sait

$$\dim(F + H) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F \cap H) = 1 + (n - 1) - 0 = n$$

donc  $F + H = E$  et, comme  $F \cap H = \{0_E\}$ , on a  $F \oplus H = E$ , ce qui est  $ii$ .

- $ii \Rightarrow i$  : Soit  $u \in E \setminus H$ . Soit  $\varphi$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  définie de la manière suivante : Pour tout  $v \in E$ , on peut écrire de manière unique  $v = v_0 + v_1$  avec  $v_0 \in H$  et  $v_1 \in \mathbb{K}u$  donc (de manière unique là encore)  $v_1 = \lambda_v u$ . On pose alors  $\varphi(v) := \lambda_v$ . Montrons que  $\varphi$  est linéaire. Soient  $v, w \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , notons

$$\begin{cases} v = v_0 + \lambda_v u, \\ w = w_0 + \lambda_w u \end{cases}$$

leur décomposition dans la somme directe  $E = H \oplus \mathbb{K}u$  de sorte que

$$\varphi(v) = \lambda_v, \varphi(w) = \lambda_w.$$

On a alors que l'égalité

$$v + \alpha w = \underbrace{(v_0 + \alpha w_0)}_{\in H} + \underbrace{(\lambda_v + \alpha \lambda_w)u}_{\in \mathbb{K}u}$$

est la décomposition de  $v + \alpha w$  dans la somme directe et, selon la définition de  $\varphi$ ,

$$\varphi(v + \alpha w) = \lambda_v + \alpha \lambda_w = \varphi(v) + \alpha \varphi(w).$$

Ce qui montre que  $\varphi$  est une forme linéaire. Reste à voir maintenant que  $\text{Ker}(\varphi) = H$ . Or, si  $v \in H$ , on a que  $v = v + 0u$  est la décomposition de  $v$  dans la somme directe  $E = H \oplus \mathbb{K}u$ . Donc  $\varphi(v) = \lambda_v = 0$  et  $v \in \text{Ker}(\varphi)$ , ce qui montre que  $H \subset \text{Ker}(\varphi)$ . En particulier,  $\dim(\text{Ker}(\varphi)) \geq \dim(H) = n - 1$ . Or la décomposition de  $u$  dans la somme directe est  $u = 0 + 1u$  d'où on tire  $\varphi(u) = 1$ . Donc  $\varphi \neq 0_{E^*}$  et  $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - 1 = \dim H$ . Comme  $H \subset \text{Ker}(\varphi)$ , ceci montre que  $H = \text{Ker}(\varphi)$ , autrement dit  $H$  est un hyperplan de  $E$ . □

**Théorème 6.** Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires sur  $E$ . On a

$$(\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\varphi).$$

*Démonstration.* Si  $\psi = \lambda\varphi$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , on a trivialement que  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ . Supposons donc que  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ . Distinguons deux cas :

- Si  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) = E$ , on a  $\varphi = \psi = 0_{E^*}$  et les deux formes sont proportionnelles l'une à l'autre (prendre par exemple  $\lambda = 1$ ).
- Si  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) = H$  avec  $H$  un hyperplan de  $E$ . Soit  $u \in E \setminus H$ . On a alors  $\varphi(u) \neq 0$  et  $\psi(u) \neq 0$ . Posons

$$\lambda = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \in \mathbb{K}^*.$$

Montrons que  $\psi = \lambda\varphi$ . Soit  $v \in E$ . Notons, comme dans la preuve du théorème précédent  $v = v_0 + \alpha u$  la décomposition de  $v$  dans la somme directe  $E = H \oplus \mathbb{K}u$  ( $v_0 \in H$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(v_0) + \alpha\psi(u) && (\text{linéarité de } \psi) \\ &= 0 + \alpha \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \varphi(u) && (v_0 \in \text{Ker}(\psi)) \\ &= \lambda\varphi(v_0) + \alpha\lambda\varphi(u) && (v_0 \in \text{Ker}(\varphi)) \\ &= \lambda(\varphi(v_0) + \alpha\varphi(u)) \\ &= \lambda\varphi(v_0 + \alpha u) \\ &= \lambda\varphi(v). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que pour tout  $v \in E$  on a  $\psi(v) = \lambda\varphi(v)$ , autrement dit  $\psi = \lambda\varphi$ . □

Remarquons que la preuve nous montre qu'une forme linéaire  $\varphi$  (non nulle) est définie connaissant son noyau et la valeur qu'elle prend sur un vecteur  $u \in E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ . Donnons maintenant quelques exemples :

- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ . C'est le plan vectoriel ( $\dim H = 3 - 1 = 2$ ) d'équation  $x - y + z = 0$  puisque  $\varphi(x, y, z) = x - y + z$  définit une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^3$ . On a

$$H = \{(y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

donc une base de  $H$  est donnée par  $\mathcal{G} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$  (c'est une famille génératrice minimale car  $\text{Card } \mathcal{G} = 2 = \dim H$ ).

Les vecteurs  $u_1 = (2, -1, -3)$  et  $u_2 = (1, 1, 1)$  appartiennent-ils à  $H$ ? Il suffit pour cela de calculer  $\varphi(u_1)$  et  $\varphi(u_2)$  :

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= 2 - (-1) + (-3) = 0 && \text{donc } u_1 \in H, \\ \varphi(u_2) &= 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 && \text{donc } u_2 \notin H. \end{aligned}$$

Les supplémentaires de  $H$  sont les droites vectorielles  $\mathbb{R}u_0$  avec  $u_0 = (a, b, c) \notin H$ , autrement dit tels que  $a - b + c \neq 0$ .

- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , nous avons noté  $\delta_a : P \mapsto P(a)$  la forme linéaire "évaluation en  $a$ ". C'est une forme linéaire non nulle sur  $\mathbb{K}_n[X]$  car  $\delta_a(1) = 1$ . Donc  $H_a = \text{Ker } \delta_a$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

La famille  $\mathcal{L} = (X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$  est une famille de  $n$  vecteurs dans  $H_a$  linéairement indépendants (car échelonnés par leur degré). C'est une famille libre maximale de  $H_a$  donc une base de  $H_a$ .

- Exercice.** 1. Montrer qu'un hyperplan de  $E$  est un sous-espace vectoriel strict de  $E$  qui n'est inclus (strictement) dans aucun autre sous-espace vectoriel de  $E$  hormis  $E$  lui-même.
2. (difficile) Montrer que tout hyperplan de  $M_n(\mathbb{K})$  intersecte  $GL_n(\mathbb{K})$ .

### 1.3 Bases duales

Dans toute cette section  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

**Théorème 7** (Base duale). Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $e_i^*$  la forme linéaire sur  $E$  définie par

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad (\text{relations d'orthogonalité de Kronecker}),$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker.  $e_i^*$  est appelé la  $i$ ème forme (linéaire) coordonnée de la base  $\mathcal{B}$ . On a

1. La famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E$  appelée base duale de  $\mathcal{B}$ .
2. Pour tout  $u \in E$ ,

$$u = \sum_{i=1}^n e_i^*(u) e_i. \tag{1.3.1}$$

3. Pour tout  $\varphi \in E^*$ ,  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$ .

Remarquons que le deuxième point justifie l'appellation "forme linéaire coordonnée" pour  $e_i^*$  car  $e_i^*(u)$  est la coordonnée de  $u$  le long du vecteur  $e_i$ .

*Démonstration.* Nous avons défini les  $e_i^*$  sur une base de  $E$ , nous savons alors qu'il existe une et une seule manière de les définir sur  $E$  tout entier par linéarité. Montrons maintenant chacun des trois points.

- La famille des  $e_i^*$  est une famille libre. En effet, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  sont tels que

$$\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0_{E^*},$$

on a, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $0 = \left( \sum_{j=0}^n \lambda_j e_j^* \right) (e_i) = \sum_{j=0}^n \lambda_j e_j^*(e_i) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \delta_{ji} = \lambda_i$ . Donc  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i$ , ce qui montre bien que la famille des  $e_i^*$  est libre. Comme elle est de rang maximal  $n = \dim E^*$ , c'est une base de  $E^*$ .

- Pour tout  $u \in E$ , notons  $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$  sa décomposition dans la base  $\mathcal{B}$ . On a

$$e_i^*(u) = e_i^*(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) = \sum_{j=1}^n u_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^n u_j \delta_{ij} = u_i,$$

ce qui montre que  $u = \sum_{i=1}^n e_i^*(u) e_i$ .

- Soit  $\varphi \in E^*$ . En utilisant la formule précédente, on a, pour tout  $u \in E$ ,

$$\varphi(u) = \varphi \left( \sum_{i=1}^n e_i^*(u) e_i \right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(u) \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(u),$$

d'où on tire  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$ .

□

Remarquons ici que pour établir les points 2 et 3, nous n'avons pas utilisé le fait que les  $e_i^*$  forment une base de  $E^*$ . La formule du point 3 montre que les  $e_i^*$  forment une famille génératrice de  $E^*$ .

**Théorème 8** (Base antéduale). *Soit  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une base de  $E^*$ . Il existe une unique base  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que*

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \varphi_i(f_j) = \delta_{ij}.$$

*Cette base est appelée antéduale (ou préduale) de la base  $\Phi$ .*

*Démonstration.* La principale difficulté de cette preuve, par rapport à la preuve de l'existence d'une base duale, est qu'on ne peut pas construire les éléments de  $E$  comme on construit une forme linéaire. Il faut donc procéder différemment. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base quelconque de  $E$ . Nous cherchons des vecteurs  $f_1, \dots, f_n \in E$  que nous pouvons écrire

$$f_j = \sum_{k=1}^n p_{jk} e_k$$

avec  $P = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  est la base duale de  $\Phi$  si et seulement si, pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , on a

$$\delta_{ij} = \varphi_i(f_j) = \varphi_i \left( \sum_{k=1}^n p_{jk} e_k \right) = \sum_{k=1}^n p_{jk} \varphi_i(e_k).$$

Soit  $A$  la matrice définie par

$$A = (a_{ki})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}, \quad a_{ki} = \varphi_i(e_k).$$

L'égalité  $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{jk} \varphi_i(e_k)$  peut s'écrire matriciellement  $I_n = PA$ . Donc, si on montre que  $A$  est inversible, on aura  $P = A^{-1}$ , ce qui démontrera l'existence et l'unicité de la base antéduale. Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

un vecteur colonne tel que  $AX = 0$ . On a alors, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$0 = (AX)_k = \sum_{i=1}^n \varphi_i(e_k)x_i = \left( \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right)(e_k).$$

La forme linéaire  $\varphi = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i$  est nulle en chacun des vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  et ces vecteurs forment une base de  $E$ , donc  $\varphi = 0_{E^*}$  :

$$0_{E^*} = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i.$$

Mais comme les  $\varphi_i$  forment une base de  $E^*$ , on en déduit que tous les  $x_i$  sont nuls, i.e.  $X = 0$ . Nous avons donc montré que le noyau de  $A$  est réduit à 0, donc  $A$  est inversible.  $\square$

Les deux théorèmes précédents montrent qu'il existe une bijection canonique entre les bases de  $E$  et celles de  $E^*$ . Donnons maintenant quelques exemples de calcul de base duale et préduale.

- Dans  $E = \mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ , posons

$$u_1 = e_1 + e_3, \quad u_2 = e_1 - e_2, \quad u_3 = e_2 - e_3.$$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  : en effet,

$$\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Notons  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminons maintenant la base duale  $\mathcal{B}^*$  de  $\mathcal{B}$  :

$$\mathcal{B}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*),$$

on doit résoudre  $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$  pour  $1 \leq i, j \leq 3$ . Faisons le calcul pour  $u_1^*$ . Posons  $u_1^* = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$ . On veut

$$\begin{cases} 1 = u_1^*(u_1) \\ 0 = u_1^*(u_2) \\ 0 = u_1^*(u_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = ae_1^*(u_1) + be_2^*(u_1) + ce_3^*(u_1) \\ 0 = ae_1^*(u_2) + be_2^*(u_2) + ce_3^*(u_2) \\ 0 = ae_1^*(u_3) + be_2^*(u_3) + ce_3^*(u_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a & + c \\ 0 = a & - b \\ 0 = & b - c \end{cases}$$

La solution de ce système est  $a = b = c = \frac{1}{2}$ . Donc  $u_1^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)$ . On trouve de même :

$$u_2^* = \frac{1}{2}(e_1^* - e_2^* - e_3^*), \quad u_3^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* - e_3^*).$$

Grâce à ce qui précède, nous pouvons déterminer  $P^{-1}$ , la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}_0$ . Il faut pour cela connaître les coordonnées de  $e_1, e_2, e_3$  dans  $\mathcal{B}$ . On utilise pour cela la formule (1.3.1) :

$e_j = \sum_{i=1}^3 u_i^*(e_j)u_i$ . Donc

$$P^{-1} = (u_i^*(e_j))_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarquez que  $P^{-1} = {}^t Q$  où  $Q$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0^*$  à  $\mathcal{B}^*$  (Pourquoi?).

- Dans  $E = \mathbb{K}_n[X]$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ , on a grâce à la formule de Taylor

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i \quad (1.3.2)$$

En posant  $\forall P \in E$ ,  $\varphi_i(P) := \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ , on a que  $\varphi_i \in E^*$  (on a  $\varphi_i = \psi_{0,i}$ , voir (1.1.1)) et la formule (1.3.2) s'écrit

$$\forall P \in E, P = \sum_{i=0}^n \varphi_i(P) X^i,$$

autrement dit,  $\varphi_i(P)$  est la coordonnée le long de  $X^i$  dans la base  $\mathcal{B}_0$  :

$$(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est la base duale de } \mathcal{B}_0.$$

En particulier,  $\mathcal{B}_0$  est une base de  $E^*$  et on a  $\forall \varphi \in E^*$ ,  $\varphi = \sum_{i=0}^n \varphi(X^i) \varphi_i$ .

- Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ , on considère les trois formes linéaires définies par

$$\varphi_0(P) = P(0), \quad \varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P(2),$$

c'est-à-dire les évaluations en 0, 1 et 2.

Montrons tout d'abord que  $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$  est une base de  $E^*$ . On calcule pour cela

$$\det_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_0(1) & \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \\ \varphi_0(X) & \varphi_1(X) & \varphi_2(X) \\ \varphi_0(X^2) & \varphi_1(X^2) & \varphi_2(X^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0,$$

donc  $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$  est une base de  $E^*$ .

Trouvons maintenant la base antéduale de  $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ . On cherche une famille  $(P_0, P_1, P_2)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$  pour  $0 \leq i, j \leq 2$ . Faisons le calcul pour  $P_0$ . Posons  $P_0 = a + bX + cX^2$ . On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \varphi_0(P_0) \\ 0 = \varphi_1(P_0) \\ 0 = \varphi_2(P_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 0 = a + b + c \\ 0 = a + 2b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc

$$P_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)}.$$

En procédant de même pour  $P_1$  et  $P_2$ , on obtient

$$P_1 = 2X - X^2 = \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)}, \quad P_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

On a ici un exemple simple de *polynômes interpolateurs de Lagrange* pour pour les valeurs 0, 1 et 2. Finalement, déterminons les 3 réels  $a, b, c$  tels que

$$\forall P \in E, \int_0^2 P(t) dt = aP(0) + bP(1) + cP(2).$$

L'application  $\varphi : P \mapsto \int_0^2 P(t) dt$  est une application linéaire sur  $E$ . Donc (formule (2)), on a

$$\varphi = \varphi(P_0)\varphi_0 + \varphi(P_1)\varphi_1 + \varphi(P_2)\varphi_2.$$

Il nous suffit donc de calculer  $\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2)$  :

$$\varphi(P_0) = \int_0^2 \left(1 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{3},$$

$$\varphi(P_1) = \int_0^2 (2t - t^2) dt = \frac{4}{3},$$

$$\varphi(P_2) = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{3}.$$

On a donc  $\varphi = \frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{4}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2$ , ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\forall P \in E, \int_0^2 P(t) dt = \frac{1}{3}P(0) + \frac{4}{3}P(1) + \frac{1}{3}P(2) \quad (\text{formule des trois niveaux}).$$



## 1.4 (\*) Formes linéaires et sous-espaces vectoriels

Nous avons vu dans la section 1.2 le lien entre formes linéaires et hyperplans. Essayons de généraliser cette construction pour inclure tous les sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Définition 9.** 1. Soit  $A$  une partie de  $E$ . On définit

$$A^\perp := \{\varphi \in E^* \mid \forall a \in A, \varphi(a) = 0\},$$

autrement dit  $A^\perp$  est l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur tous les éléments de  $A$ .

2. Soit  $B$  une partie de  $E^*$ . On définit de manière analogue l'ensemble des  $u \in E$  sur lesquels tous les éléments de  $B$  s'annulent :

$${}^\perp B := \{u \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(u) = 0\}$$

Remarquons ici la notation que nous avons employée :  $A^\perp$  est une partie de  $E^*$  alors que  ${}^\perp B$  est une partie de  $E$ , la différence permet ici de savoir si l'on a affaire à un sous-espace de  $E$  ou de  $E^*$ .

*Exemple.* 1. On a  $E^\perp = \{0_{E^*}\}$  et  $\{0_E\}^\perp = E^*$ . De même,  ${}^\perp(E^*) = \{0_E\}$  et  ${}^\perp\{0_{E^*}\} = E$ .

2. Si  $H = \text{Ker } \varphi$  est un hyperplan de  $E$ , on a  $H^\perp = \mathbb{K}\varphi$ , c'est le théorème 6.

Le principal résultat de cette section est contenu dans les deux théorèmes suivants :

**Théorème 10.** 1. Si  $A$  et  $A'$  sont deux parties de  $E$  avec  $A \subset A'$ , on a  $(A')^\perp \subset A^\perp$  (l'application  $A \mapsto A^\perp$  renverse l'inclusion).

2. Si  $A$  est une partie de  $E$ ,  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  et  ${}^\perp(A^\perp) = \text{Vect}(A)$ . En particulier, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a  ${}^\perp(A^\perp) = A$ .

3. Si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,

$$n = \dim(A) + \dim(A^\perp).$$

Le deuxième point de ce théorème est important : Si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , connaître  $A$  est équivalent à connaître  $A^\perp$  puisque l'un se déduit de l'autre. Les bases de  $A^\perp$  (ou plus généralement les familles génératrices) forment des *systèmes d'équations* de  $A$ .

*Démonstration du théorème 10.* 1. Soit  $\varphi \in (A')^\perp : \forall u \in A', \varphi(u) = 0$ . En particulier, comme  $A \subset A'$ , on a  $\forall u \in A, \varphi(u) = 0$ , c'est-à-dire  $\varphi \in A^\perp$ . Ceci montre donc que  $(A')^\perp \subset A^\perp$ .

2. Soient  $\varphi, \psi \in A^\perp$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a, pour tout  $a \in A$ ,

$$(\lambda\varphi + \psi)(a) = \lambda\varphi(a) + \psi(a) = \lambda \times 0 + 0 = 0,$$

ce qui montre que  $\lambda\varphi + \psi \in A^\perp$  et donc que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$ . Par définition de  $A^\perp$ , si  $a \in A$ , on a

$$\forall \varphi \in A^\perp, \varphi(a) = 0,$$

ce qui montre que  $a \in {}^\perp(A^\perp) : A \subset {}^\perp(A^\perp)$ . Comme  ${}^\perp(A^\perp)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (voir théorème 11), nous avons  $\text{Vect}(A) \subset {}^\perp(A^\perp)$ . Nous devons maintenant montrer l'inclusion réciproque :  ${}^\perp(A^\perp) \subset \text{Vect}(A)$ . Nous allons montrer

$$\text{Vect}(A)^c \subset ({}^\perp(A^\perp))^c.$$

Si  $\text{Vect}(A) = E$ , il n'y a rien à faire. Sinon, soit  $u \in \text{Vect}(A)^c$ . Nous devons montrer  $u \notin {}^\perp(A^\perp)$ , autrement dit

$$\exists \varphi \in A^\perp, \varphi(u) \neq 0$$

(c'est la négation de  $\forall \varphi \in A^\perp, \varphi(u) = 0$ ). Nous cherchons donc une forme linéaire  $\varphi \in A^\perp$  (nulle sur  $\text{Vect}(A)$ ) telle que  $\varphi(u) \neq 0$ . Soit  $k = \dim(\text{Vect}(A)) < n$ . On se donne  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $\text{Vect}(A)$ . Posons  $e_{k+1} = u$  et complétons la famille libre  $(e_1, \dots, e_{k+1})$  en une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Prenons la forme linéaire  $\varphi$  définie par

$$\varphi(e_i) = 0 \text{ si } i \neq k+1, \quad \varphi(e_{k+1}) = 1.$$

On a alors  $e_1, \dots, e_k \in \text{Ker}(\varphi)$  donc  $A = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \text{Ker}(\varphi)$ , ce qui montre  $\varphi \in A^\perp$  et  $\varphi(u) = \varphi(e_{k+1}) = 1 \neq 0$ . Ceci achève la preuve de  $x \notin {}^\perp(A^\perp)$ .

3. Soit  $k = \dim(A)$ . Choisissons une base  $(e_1, \dots, e_k)$  de  $A$  que nous complétons en une base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale. Posons  $B := \text{Vect}(e_1^*, \dots, e_k^*)$ , de sorte que  $\dim(B) = k = \dim(A)$ . Si  $\varphi \in B$ , on peut écrire de manière unique

$$\varphi = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_k e_k^*.$$

Donc si  $\varphi \in B \cap A^\perp$ , on a  $\varphi = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_k e_k^*$  et  $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$ . Donc

$$\lambda_1 = \varphi(e_1) = 0, \dots, \lambda_k = \varphi(e_k) = 0,$$

ce qui montre que  $\varphi = 0_{E^*}$  :

$$B \cap A^\perp = \{0_{E^*}\}.$$

Soit maintenant  $\psi \in E^*$  quelconque. Il existe des coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\psi = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*$ . Posons

$$\psi_B = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_k e_k^*, \quad \psi_{A^\perp} = \alpha_{k+1} e_{k+1}^* + \dots + \alpha_n e_n^*.$$

On a clairement  $\psi_B \in B$ . De plus, on voit que  $\psi_{A^\perp}(e_1) = \dots = \psi_{A^\perp}(e_k) = 0$  donc  $A \subset \text{Ker}(\psi_{A^\perp})$  et  $\psi_{A^\perp} \in A^\perp$ . Nous avons donc montré que  $B + A^\perp = E^*$ . Finalement

$$n = \dim(E^*) = \dim(B) + \dim(A^\perp) = \dim(A) + \dim(A^\perp).$$

□

**Théorème 11.** 1. Si  $B$  et  $B'$  sont deux parties de  $E^*$  avec  $B \subset B'$ , on a  ${}^\perp(B') \subset {}^\perp B$  (l'application  $B \mapsto {}^\perp B$  renverse l'inclusion).

2. Si  $B$  est une partie de  $E^*$ ,  ${}^\perp B = {}^\perp(\text{Vect}(B))$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $({}^\perp B)^\perp = \text{Vect}(B)$ .

3. Si  $B$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$ ,

$$n = \dim(B) + \dim({}^\perp B).$$

La preuve de ce second théorème est similaire à celle du premier. Nous la laissons donc en exercice. L'analogie entre ces deux théorèmes est assez remarquable et illustre la dualité (au sens usuel) entre  $E$  et  $E^*$ . Nous avons vu que  $E$  et  $E^*$  sont isomorphes, mais pas de manière naturelle. Cependant, nous avons le fait suivant :

**Théorème 12.** On appelle *bidual* de  $E$  le dual de  $E^*$  (l'ensemble des formes linéaires sur  $E^*$ ) noté  $E^{**}$ . Si  $u \in E$ , on définit une forme linéaire  $\Theta_u : E^* \rightarrow \mathbb{K}$  par

$$\Theta_u(\varphi) = \varphi(u).$$

On a donc  $\Theta_u \in E^{**}$  et l'application  $u \mapsto \Theta_u$  est linéaire. Si  $E$  est de dimension finie, cette application est un isomorphisme entre  $E$  et  $E^{**}$ .

*Démonstration.* Vérifions que  $\Theta_u$  est linéaire. Si  $\varphi, \psi \in E^*$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a

$$\Theta_u(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi)(u) = \lambda\varphi(u) + \psi(u) = \lambda\Theta_u(\varphi) + \Theta_u(\psi),$$

ce qui montre que  $\Theta_u$  est une forme linéaire sur  $E^*$  :  $\Theta_u \in E^{**}$ . De plus, si  $u, v \in E$  et si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a, pour tout  $\varphi \in E^*$ ,

$$\Theta_{\lambda u + v}(\varphi) = \varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v) = \lambda\Theta_u(\varphi) + \Theta_v(\varphi).$$

Remarquons qu'on a utilisé ici le fait que  $\varphi$  est linéaire (!). Nous avons donc montré ( $\varphi$  étant quelconque) que  $\Theta_{\lambda u + v} = \lambda\Theta_u + \Theta_v$ , ce qui montre que  $\Theta : u \mapsto \Theta_u$  est linéaire. Ensuite, on a  $\dim E^{**} = \dim(E^*) = \dim(E)$ , donc pour montrer que  $\Theta$  est un isomorphisme, il suffit de montrer que  $\Theta$  est injective. Or, si  $\Theta_u = 0$  pour un certain  $u \in E$ , on a  $\forall \varphi \in E^*, 0 = \Theta_u(\varphi) = \varphi(u)$ , ce qui impose  $u = 0$  (on consultera ici la preuve du théorème 10 où l'on montre que pour tout sous-espace  $A$  et tout  $u \neq 0$  il existe une forme linéaire  $\varphi$  nulle sur  $A$  et telle que  $\varphi(u) \neq 0$ , il suffit ici de prendre  $A = \{0\}$ ).  $\Theta$  est donc un isomorphisme. □

## 1.5 (\*) Formes linéaires et applications

Dans cette section, donnons-nous  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

**Définition 13.** Soit  $\Phi \in L(E, F)$  une application linéaire. On appelle *application transposée* l'application linéaire  ${}^t\Phi : F^* \rightarrow E^*$  définie par  ${}^t\Phi(\varphi) = \varphi \circ \Phi$  pour tout  $\varphi \in F^*$ .

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que  ${}^t\Phi$  est bien définie et linéaire.

**Théorème 14.** Soit  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{C}$ ) une base de  $E$  (resp. de  $F$ ). Notons  $\mathcal{B}^*$  (resp.  $\mathcal{C}^*$ ) sa base duale. On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}({}^t\Phi) = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\Phi)).$$

Autrement dit, la matrice de l'application transposée (dans les bases duales) est la transposée de l'application elle-même.

*Démonstration.* Notons  $n = \dim(E)$  et  $m = \dim(F)$ . Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  les matrices de  $\Phi$  et  ${}^t\Phi$  :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \Phi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, {}^t\Phi(f_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ji} e_j^*.$$

On a  $\sum_{j=1}^n b_{ji} e_j^* = {}^t\Phi(f_i^*) = f_i^* \circ \Phi$ . La formule (1.3.1) peut s'écrire (en enlevant la référence à  $u \in E$ )

$$\text{Id}_E = \sum_{j=1}^n e_j^*(\cdot) e_j, \text{ d'où}$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ji} e_j^* = f_i^* \circ \Phi \circ \text{Id}_E = \sum_{j=1}^n e_j^*(\cdot) f_i^*(\Phi(e_j)) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i^*(\cdot).$$

En identifiant, on trouve donc  $b_{ji} = a_{ij}$  pour toute paire  $(i, j)$ , ce qui montre  $B = {}^tA$ .  $\square$

## 1.6 Exercices

**Exercice 1.** Dans  $M_n(\mathbb{K})$ ,  $E_{ij}$  désigne la matrice, dite élémentaire, dont les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  qui vaut 1 :  $E_{ij} = (\delta_{ik} \delta_{jl})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}}$ .

- Justifier que  $\mathcal{B}_0 = (E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une base de  $M_n(\mathbb{K})$  (c'est sa base canonique). En déduire  $\dim(M_n(\mathbb{K}))$ .
- On note  $(E_1, E_2, \dots, E_n)$  la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  (l'espace des matrices colonnes de longueur  $n$ ). Prouver que, pour toute paire  $(i, j)$  d'entiers entre 1 et  $n$ , on a  ${}^t E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$ , et  $E_i \cdot {}^t E_j = E_{ij}$ .
- En utilisant la question précédente, montrer que, pour tous  $i, j, k, l$  entiers entre 1 et  $n$ , on a  $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ .
- Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice de  $M_n(\mathbb{K})$  dont on note  $L_1, \dots, L_n$  les lignes et  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes. Décrire les matrices  $E_{ij} A$  et  $A E_{ij}$ . En déduire le centre de  $M_n(\mathbb{K})$  :  $\mathcal{C} := \{A \in M_n(\mathbb{K}), \forall M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$ .

**Exercice 2.** 1. Définir, à l'aide de quantificateurs, les propriétés suivantes de la matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  :

- $A$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure),
- $A$  est diagonale,
- $A$  est scalaire,
- $A$  est symétrique (resp. antisymétrique).

- Soit  $D \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonale. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $D$  soit inversible et déterminer alors son inverse.

- On note  $S_n$  (resp.  $A_n$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de  $M_n(\mathbb{K})$ . Après avoir rappelé les propriétés de la transposition, montrer que  $S_n$  et  $A_n$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $M_n(\mathbb{K})$ .
- Donner une base de  $S_n$  et de  $A_n$  lorsque  $n = 2$  ou  $3$  puis généraliser. Donner la dimension de  $S_n$  et  $A_n$ .

**Exercice 3.** Pour toute matrice  $A = (a_{ij})$  de  $M_n(\mathbb{K})$ , on appelle trace de  $A$  le scalaire  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

- Prouver que l'application  $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire non nulle sur  $M_n(\mathbb{K})$ .
- En déduire que  $H = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \text{tr}(A) = 0\}$  est un hyperplan de  $M_n(\mathbb{K})$  et en donner une base lorsque  $n = 2$ .
- Prouver que pour toutes matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$ , et  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
- Prouver que  $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{tr}((AB)^p) = \text{tr}((BA)^p)$ .
- A-t-on  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$  pour tout couple de matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  ?
- Prouver que pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on a  $\text{tr}({}^t A A) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $A = O_n$ .

**Exercice 4.** Soit  $n$  un entier naturel,  $n \geq 2$ .

- $\mathbb{R}^{n-1}$  est-il un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  ? Donner la forme générale des formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ . En déduire une caractérisation de ses hyperplans.
- Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On pose  $H_1 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ ,  $H_3 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = 1\}$ .  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  sont-ils des hyperplans de  $\mathbb{R}_n[X]$  ? Donner deux supplémentaires distincts de  $H_1$  et de  $H_2$ .

**Exercice 5.** Dans  $E = \mathbb{R}^5$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ , on considère  $F = \text{Vect}(u, v, w, t)$  où

$$u = (1, 0, 2, 0, 3), \quad v = (2, 0, 1, 0, -1), \quad w = (-1, 0, 1, 0, 2), \quad t = (-1, 0, 4, 0, 9).$$

Par la méthode d'échelonnement, déterminer le rang de la famille  $(u, v, w, t)$ , une base de  $F$ , sa dimension, l'un de ses supplémentaires dans  $E$  et l'un de ses systèmes d'équations.

**Exercice 6.** Dans  $E = \mathbb{R}^4$ , muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ , on considère  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 3z + t = 5x + 4y\}$ . Justifier que  $F$  est un hyperplan de  $E$ , en déduire sa dimension, puis en donner une base, toutes ses équations et tous ses supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 7.** Reprendre l'exercice précédent avec  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $F = \{P \in E, P(1) + P'(1) = 0\}$ .

**Exercice 8.** Dans  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on considère deux vecteurs distincts  $u, v$ . Construire une forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$  telle que  $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ . (On pourra compléter  $e_1 = u - v$  en une base de  $E$ ).

**Exercice 9.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

- Soient  $H_1, H_2$  deux hyperplans de  $E$ . Discuter la dimension de  $H_1 \cap H_2$ . Plus généralement, si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , discuter la dimension de  $F \cap H_1$ .
- Soient  $H_1, H_2$  et  $H_3$  trois hyperplans de  $E$ . On se donne  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  trois formes linéaires telles que  $H_i = \text{Ker } \varphi_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Discuter suivant le rang  $r$  de  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  la dimension de  $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ . Interpréter géométriquement les résultats lorsque  $n = 3$ .
- Si  $H_1, H_2, \dots, H_p$  sont  $p$  hyperplans de  $E$ , prouver que  $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$ .
- Soient  $H$  un hyperplan et  $u$  un vecteur de  $E \setminus H$ . Montrer qu'on peut construire une base de  $E$  contenant  $u$  et aucun vecteur de  $H$ .

**Exercice 10.** Dans  $E = \mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ , on considère

$$u_1 = e_2 + e_3, \quad u_2 = e_2 - e_3, \quad u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3.$$

1. Justifier que  $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $E$  et déterminer sa base duale. En déduire la matrice de passage  $Q$  de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_0$ .
2. On pose  $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ . Justifier que  $F$  est un hyperplan de  $E$  et déterminer l'une de ses équations.
3. Déterminer un système d'équations de  $G = \text{Vect}(u_3)$ .

**Exercice 11.** Sur  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , on considère les cinq formes linéaires suivantes :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P'(0), \quad \varphi_3(P) = P(1), \quad \varphi_4(P) = P'(1), \quad \psi(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

1. Prouver que  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$  est une base de  $E^*$  et déterminer sa base préduale  $(H_1, H_2, H_3, H_4)$ .
2. Déterminer les réels  $a, b, c, d$  tels que  $\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_4$ .

**Exercice 12.** Dans  $E = \mathbb{R}^5$  muni de sa base canonique, on considère l'ensemble  $F_1$  des vecteurs  $(x, y, z, t, u)$  satisfaisant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0, \\ x + y + z + t + u = 0, \\ 5x + 4y + 3z + 2t + u = 0. \end{cases}$$

1. Justifier que  $F_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $2 \leq \dim(F_1) \leq 4$ .
2. Les vecteurs  $u = (6, -9, 1, 1, 1)$  et  $v = (2, -1, 1, -2, 1)$  appartiennent-ils à  $F_1$  ?
3. Déterminer une base de  $F_1$  et en déduire sa dimension.
4. Déterminer un supplémentaire  $G_1$  de  $F_1$  dans  $E$  puis en donner un système d'équations.
5. On pose  $F_2 = \text{Vect}(e_1, e_2)$ . Déterminer  $F_1 \cap F_2$ .

**Exercice 13.** On se propose de prouver que pour toute forme linéaire  $\varphi$  sur  $M_n(\mathbb{K})$ , il existe une unique matrice  $A$  telle que

$$\forall X \in M_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(X) = \text{tr}(AX).$$

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Justifier que l'application  $\varphi_A$  de  $M_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  définie par  $\varphi_A(X) = \text{tr}(AX)$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{K})$ .
2. On note  $\Phi$  l'application de  $M_n(\mathbb{K})$  dans son dual définie par  $\Phi(A) = \varphi_A$ . Montrer que  $\Phi$  est linéaire.
3. Montrer que  $\text{Ker}(\Phi) = \{O_n\}$  (on calculera pour cela  $\varphi_A(E_{ij})$ ).
4. En déduire que  $\Phi$  est un isomorphisme et conclure.