

La négociation

Chantal Marlats

Introduction

La négociation est présente dans nos vies quotidiennes : négocier avec nos amis pour aller dans tel ou tel bar ou voir tel ou tel film, pour l'achat d'un bien immobilier ou d'une voiture, ou encore dans les relations professionnelles, par exemple pour fixer un salaire ou des conditions de travail.

L'actualité nous rappelle que les négociations sont aussi au cœur des relations internationales entre États. C'est le cas, par exemple, de la COP, des négociations sur les tarifs douaniers ou encore du partage de certains territoires, comme les fonds marins ou des zones géopolitiques conflictuelles.

La COP : chaque année, près de 200 pays se réunissent pour décider comment réduire les émissions de dioxyde de carbone. Ces discussions se tiennent dans le cadre de la Convention-cadre des Nations unies sur le changement climatique. L'objectif commun est de limiter le réchauffement climatique afin de réduire les dommages humains et environnementaux ainsi que l'incertitude économique. Il existe donc un surplus collectif à coopérer. Cependant, réduire les émissions coûte cher et investir dans la transition pèse sur la compétitivité. Chaque pays préférerait que ce soient les autres qui fassent des efforts. En cas de désaccord, tous les pays ne sont pas affectés de la même manière. Les pays tropicaux subissent les impacts les plus immédiats tandis que les pays riches ont une plus grande capacité d'adaptation. Le pouvoir de négociation est réparti de manière asymétrique.

Partage des espaces marins : Avant 1982, peu de règles encadraient la délimitation des espaces maritimes et les droits d'exploitation des eaux. La prise de conscience de l'importance des ressources maritimes (notamment des minerais), couplée à la montée des technologies d'exploration, en a fait des espaces de plus en plus convoités. Face à la montée des tensions, les Nations unies ont lancé des négociations en 1973 pour trouver des règles communes concernant la délimitation des espaces maritimes et la répartition des droits d'exploitation. Ces négociations ont abouti en 1982 aux accords de Montego Bay, officiellement appelés Convention des Nations unies sur le droit de la mer (CNUDM).

Ils constituent l'un des exemples les plus ambitieux de négociation internationale portant sur la gestion d'un bien commun mondial : les océans.

Chaque partie avait intérêt à trouver un accord pour éviter la multiplication des conflits maritimes, la surexploitation des ressources et l'incertitude économique qui en découle. Les intérêts des pays n'étaient pas pour autant complètement alignés : les grandes puissances maritimes, attachées à la liberté de navigation ; les États côtiers, désireux d'étendre leur contrôle sur les ressources ; les pays en développement, revendiquant un partage plus équitable des richesses marines.

Le partage des espaces marins et la COP constituent des exemples qui ont cela en commun qu'il existe un surplus collectif que des acteurs aux intérêts divergents cherchent à partager. Lors du processus, les différentes parties font valoir leurs options extérieures de sorte à infléchir le résultat en leur faveur.

Comment répartir ce surplus tout en garantissant efficacité et équité ? Qu'est-ce qu'une bonne règle de partage ? Cette question se retrouve au cœur des approches axiomatiques de la négociation, notamment dans la théorie développée par John Nash. Le principe de la démarche est simple : on identifie des propriétés raisonnables que l'on aimerait voir satisfaites, puis on détermine la règle qui, à toute situation de négociation, associe un partage satisfaisant ces propriétés.

1 Le cadre d'analyse

Commençons par un exemple très simple. Deux colocataires, $i = 1, 2$ veulent partager une pizza. On note $x_i \in [0, 1]$ la proportion de pizza qui revient au colocataire i . Un partage est réalisable si $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

Que se passe-t-il en cas de désaccord ? Supposons que dans ce cas, la pizza est jetée. On comprend bien dans cet exemple que la situation de désaccord n'est souhaitable pour aucun des agents : il existe plein de partages qui font que les agents sont strictement mieux que le cas où la pizza est jetée.

Complexifions les choses : supposons l'utilité marginale de la pizza est décroissante : $u_i(x_i) = \sqrt{x_i}$. Dans cet exemple, ce qu'il faut prendre en compte pour évaluer la satisfaction est l'utilité et non le partage en soi.

Quel est l'ensemble des niveaux d'utilité atteignables ? Prenons un partage quelconque tel que $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$:

$$x_2 \leq 1 - x_1 \Leftrightarrow \sqrt{x_2} \leq \sqrt{1 - x_1}$$

Comme $\sqrt{x_i} = u_i \Leftrightarrow u_i^2 = x_i$, l'équation se ré-écrit :

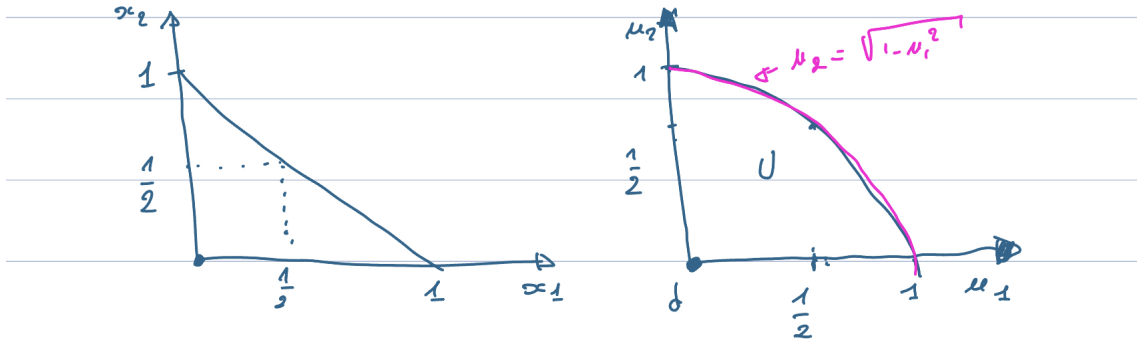
$$u_2 \leq \sqrt{1 - u_1^2}$$

On note U l'ensemble des profils d'utilité (u_1, u_2) réalisables par un accord. Dans

l'exemple $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2 : u_2 \leq \sqrt{1 - u_1^2}\}$. L'équation $u_2 = \sqrt{1 - u_1^2}$ est la frontière de Pareto. Elle se définit de manière générale comme suit :

$$P(U) = \{(u_1, u_2) \in U : \forall v \in U, u_1 \geq v_1, u_2 \geq v_2 \text{ avec au moins une inégalité stricte}\}$$

Le point de désaccord s'exprime aussi en termes d'utilité : $u_i(0) = 0$ pour tout i . Graphiquement, on obtient :



On supposera que cet ensemble est fermé et convexe (pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $(u_1, u_2) \in U$ et $(v_1, v_2) \in U : w := (\lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1, \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2) \in U$). On supposera aussi que : $U \cap \{(u_1, u_2) : u_i > d_i, \forall i = 1, 2\} \neq \emptyset$. Cette hypothèse assure qu'il existe des accords qui sont plus satisfaisants que le point de désaccord pour les deux agents : il existe un surplus collectif à partager.

Un modèle de négociation est simplement défini par le couple (U, d) , où :

- U est l'ensemble des accords possibles (ensemble de faisabilité) ;
- d est le point de désaccord (ou point de menace).

Une **solution** est une fonction f qui associe à chaque jeu (U, d) une issue telle que $f(U, d) \in U$.

Il s'agit de l'alternative proposée par un arbitre et acceptée par les joueurs comme accord.

L'objectif est désormais d'identifier les propriétés que l'on peut exiger d'un concept de solution.

Notations

Let $x, y \in \mathbb{R}^2$

- $x \geq y \Leftrightarrow x_1 \geq y_1 \text{ and } x_2 \geq y_2$.
- $x > y \Leftrightarrow [x_1 \geq y_1 \text{ and } x_2 > y_2] \text{ or } [x_1 > y_1 \text{ and } x_2 \geq y_2]$
- $x >> y \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ and } x_2 > y_2$

2 Propriétés de la solution de Nash

En 1953, John Nash a proposé un ensemble de propriétés, appelées axiomes, permettant de définir un concept de solution pour les problèmes de négociation.

On souhaite éviter les situations dans lesquelles l'issue proposée par la solution est dominée par une autre issue pour les deux joueurs (ou bien dominée pour un joueur et indifférente pour l'autre). Dans un tel cas, un arbitre rationnel préférerait l'alternative dominante à l'issue proposée par la solution. L'axiome suivant permet d'exclure ce type de situation.

A1 : Optimalité de Pareto. Une solution f satisfait A1 si, pour tout jeu (U, d) , et pour tout $u \in U$ tel que $u \geq f(U, d)$, on a nécessairement

$$u = f(U, d).$$

Autrement dit, il n'existe pas d'élément $u \neq f(U, d)$ tel que

$$u_1 \geq f_1(U, d) \quad \text{et} \quad u_2 \geq f_2(U, d).$$

Ainsi, $f(U, d)$ appartient à l'ensemble $P(U)$ des allocations Pareto-optimales.

Cette propriété correspond à une exigence d'efficacité : la solution ne doit pas laisser de surplus inutilisé.

Supposons maintenant que les joueurs soient identiques, c'est-à-dire qu'ils disposent des mêmes options extérieures et que tout gain réalisable pour un joueur est également réalisable pour l'autre.

Mathématiquement, cela signifie que l'ensemble U est symétrique par rapport à la diagonale principale et que le point de désaccord est identique pour les deux joueurs.

L'ensemble U est dit symétrique si :

$$d_1 = d_2$$

et si

$$(u_1, u_2) \in U \Rightarrow (u_2, u_1) \in U.$$

Lorsque les joueurs sont identiques, il n'existe aucune raison de privilégier l'un des agents dans l'allocation proposée. Cette exigence d'équité est formalisée par l'axiome de symétrie.

A2 : Symétrie. Une solution f satisfait A2 si, pour tout jeu symétrique (U, d) ,

$$f_1(U, d) = f_2(U, d).$$

Si deux solutions f et ϕ satisfont A1 et A2, alors

$$f(U, d) = \phi(U, d)$$

pour tout jeu symétrique (U, d) .

Pour établir ce résultat, supposons par l'absurde qu'il existe dans un jeu symétrique (U, d) deux solutions distinctes $f(U, d) = u$ et $\phi(U, d) = v$.

Supposons sans perte de généralité que $u_1 > v_1$. L'axiome d'optimalité de Pareto implique alors $u_2 < v_2$.

Par symétrie, on doit avoir

$$u_1 = u_2 \quad \text{et} \quad v_1 = v_2.$$

On obtient donc

$$u_1 = u_2 < v_2 = v_1,$$

ce qui constitue une contradiction.

Lorsque les utilités représentent des paiements monétaires, il est naturel d'exiger que le concept de solution soit indépendant de l'unité de mesure. Ainsi, si un accord est exprimé en dollars puis converti en euros, le résultat doit être modifié selon le même facteur d'échelle.

On peut également exiger la covariance par translation : si l'on ajoute une constante aux gains de chaque joueur, la solution doit être décalée du même montant.

A3 : Covariance par transformation affine positive.

Soient (U, d) , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ avec $\alpha_i \geq 0$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2)$.

On définit

$$U' = \{u' \mid \exists u \in U \text{ tel que } u'_i = \alpha_i u_i + \beta_i, \forall i = 1, 2\},$$

et

$$d'_i = \alpha_i d_i + \beta_i.$$

Une solution f satisfait A3 si

$$f_i(U', d') = \alpha_i f_i(U, d) + \beta_i, \quad i = 1, 2.$$

La covariance par multiplication par α peut être discutée lorsque les utilités ne représentent pas des montants monétaires mais des niveaux d'utilité abstraits.

De même, la covariance par translation peut être critiquée car elle suppose que l'utilité marginale de la richesse est indépendante du niveau de richesse déjà détenu.

Remarque Si une solution f satisfait A3, alors il est toujours possible de transformer un jeu (U, d) en un jeu (U', d') tel que

$$f(U', d') = (1, 1) \quad \text{et} \quad d' = (0, 0),$$

en choisissant

$$\alpha = \left(\frac{1}{f_1(U, d) - d_1}, \frac{1}{f_2(U, d) - d_2} \right),$$

$$\beta = \left(\frac{-d_1}{f_1(U, d) - d_1}, \frac{-d_2}{f_2(U, d) - d_2} \right).$$

Nous présentons maintenant le dernier axiome, qui est également le plus controversé.

Supposons que $V \subset U$ et que la solution du problème (U, d) , notée $f(U, d)$, appartienne à V .

On considère que V est obtenu en éliminant certaines alternatives de U (toutes sauf éventuellement $f(U, d)$).

On peut alors se demander ce qu'il advient de la solution lorsque l'ensemble des alternatives possibles est réduit à V .

On peut défendre l'idée que les joueurs continueront à choisir $f(U, d)$, puisque si cette issue était la meilleure dans U et qu'aucune nouvelle alternative n'a été introduite, le choix devrait rester inchangé.

Cette justification est pertinente si $f(U, d)$ constitue la meilleure alternative pour chaque joueur. En revanche, si la solution résulte d'un compromis stratégique, la présence ou l'absence d'alternatives peut influencer la décision.

A4 : Invariance par rapport aux alternatives non pertinentes.

Soient (U, d) et (V, d) tels que $V \subset U$ et $f(U, d) \in V$.

Si f satisfait A4, alors

$$f(V, d) = f(U, d).$$

3 La solution de Nash

Définition La solution de Nash est définie par

$$f^N(U, d) = \arg \max_{u \in U, u \geq d} (u_1 - d_1)(u_2 - d_2).$$

Sous les hypothèses faites précédemment sur U , $f^N(U, d)$ est bien définie et unique. Le résultat suivant constitue le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 3.1 *La solution de Nash satisfait les axiomes A1, A2, A3 et A4. De plus, elle est l'unique solution vérifiant simultanément ces quatre axiomes.*

Il y a deux parties dans la démonstration : nous prouvons d'abord que la solution de Nash satisfait les axiomes, puis nous établissons l'unicité.

f^N satisfait A1

Supposons par l'absurde que f^N ne satisfasse pas A1. Alors il existe (U, d) et un point v tel que

$$\forall i, v_i \leq f_i^N,$$

avec au moins une inégalité stricte.

On obtient alors

$$(v_1 - d_1)(v_2 - d_2) > (f_1^N - d_1)(f_2^N - d_2),$$

ce qui contredit le fait que f^N maximise le produit de Nash.

f^N satisfait A2

Soit (U, d) un jeu symétrique, c'est-à-dire tel que $d_1 = d_2$.

Par définition,

$$(f_1^N - d_1)(f_2^N - d_1) \geq (u_1 - d_1)(u_2 - d_1), \quad \forall (u_1, u_2) \in U.$$

Comme le jeu (U, d) est symétrique, on a également $(f_2^N, f_1^N) \in U$.

On obtient alors

$$(f_2^N - d_1)(f_1^N - d_1) \geq (u_1 - d_1)(u_2 - d_1), \quad \forall (u_1, u_2) \in U.$$

Comme la solution est unique, on en déduit que

$$f_1^N = f_2^N.$$

f^N satisfait A3

Soit $(V, d') = (\alpha U + \beta, \alpha d + \beta)$.

On a

$$f^N(V, d') = \arg \max_{v \in V, v \geq d'} (v_1 - d'_1)(v_2 - d'_2).$$

La solution $f^N(U, d)$ du problème

$$\max_{u \in U, u \geq d} (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$$

est également solution de

$$\max_{u \in U, u \geq d} \alpha_1 \alpha_2 (u_1 - d_1)(u_2 - d_2),$$

ou de manière équivalente :

$$\max_{u \in U, u \geq d} (\alpha_1 u_1 + \beta_1 - \alpha_1 d_1 - \beta_1)(\alpha_2 u_2 + \beta_2 - \alpha_2 d_2 - \beta_2).$$

On effectue alors le changement de variable et on définit

$$v^* = \alpha f^N(U, d) + \beta.$$

Ainsi, v^* est solution du problème

$$\max_{v \in V, v \geq d'} (v_1 - d'_1)(v_2 - d'_2).$$

On peut donc conclure que

$$v^* = f^N(V, d') = \alpha f^N(U, d) + \beta.$$

f^N **satisfait A4**

Par définition,

$$(f_1^N(U, d) - d_1)(f_2^N(U, d) - d_2) \geq (u_1 - d_1)(u_2 - d_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in U.$$

Si $V \subset U$, alors

$$(f_1^N(U, d) - d_1)(f_2^N(U, d) - d_2) \geq (u_1 - d_1)(u_2 - d_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in V.$$

Donc $f^N(U, d)$ maximise également le produit de Nash. Par unicité de la solution, on obtient

$$f^N(U, d) = f^N(V, d).$$

Nous démontrons maintenant la seconde partie du résultat : la solution de Nash est l'unique solution satisfaisant A1–A4.

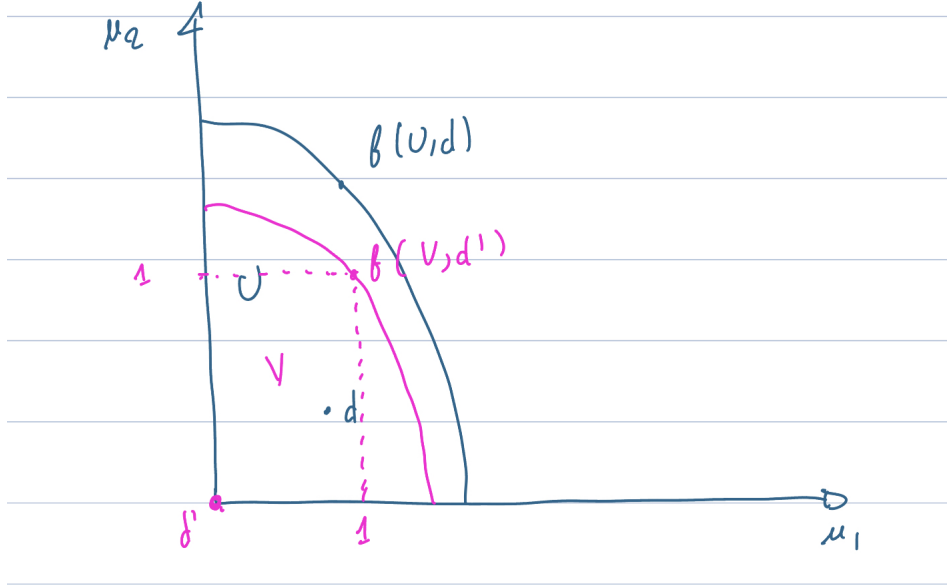
Soit f une solution vérifiant les axiomes A1 à A4. Montrons que $f = f^N$ pour tout jeu de négociation (U, d) .

Fixons un jeu (U, d) et appliquons la transformation affine définie par

$$\alpha = \left(\frac{1}{f_1(U, d) - d_1}, \frac{1}{f_2(U, d) - d_2} \right),$$

$$\beta = \left(\frac{-d_1}{f_1(U, d) - d_1}, \frac{-d_2}{f_2(U, d) - d_2} \right).$$

On obtient alors $d' = (0, 0)$ et $f(V, d') = (1, 1)$.



Construisons ensuite un rectangle contenant V , symétrique par rapport à la diagonale principale et dont un côté est situé sur la droite $u_1 + u_2 = 2$.

Puisque le jeu (W, d') est symétrique, les axiomes A1 et A2 impliquent l'unicité de la solution :

$$f^N(W, d') = f(W, d').$$

D'après A4, on a également

$$f(W, d') = f(V, d')$$

et

$$f^N(W, d') = f^N(V, d')$$

car $W \supset V$.

On en déduit donc

$$f^N(V, d') = f(V, d').$$

D'après A3, on obtient

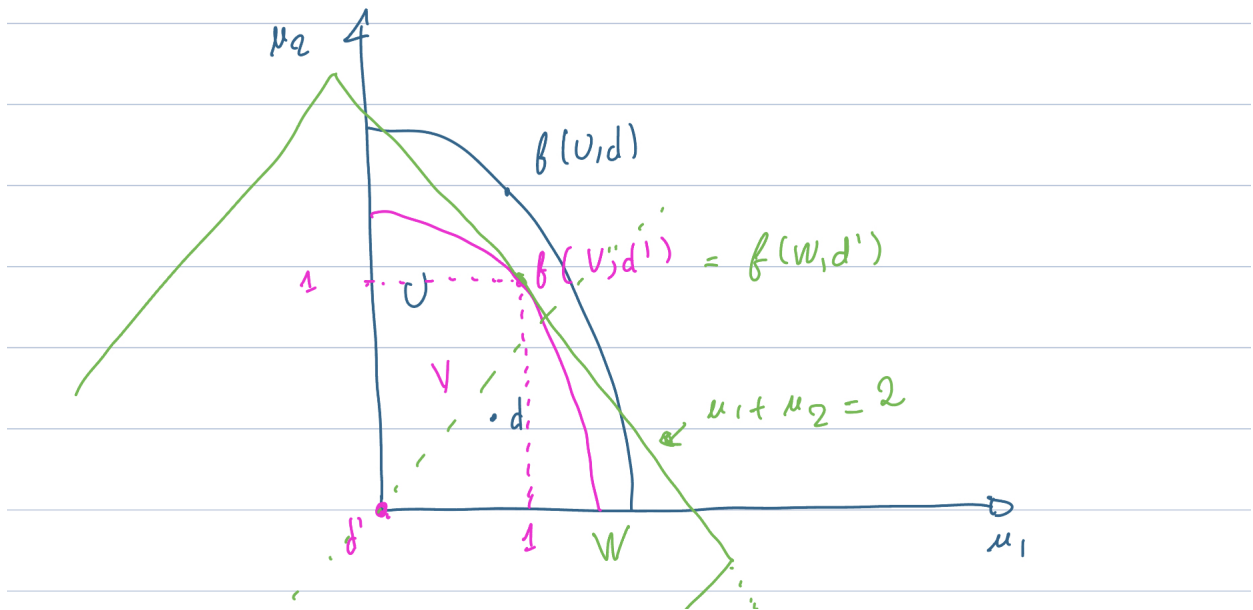
$$f(V, d') = \alpha f(U, d') + \beta$$

et

$$f^N(V, d') = \alpha f^N(U, d') + \beta.$$

Donc

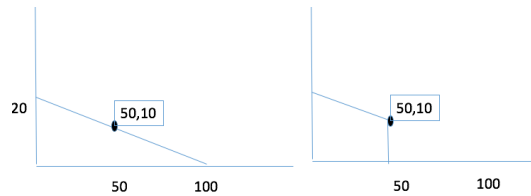
$$f^N(U, d') = f(U, d').$$



4 Discussion

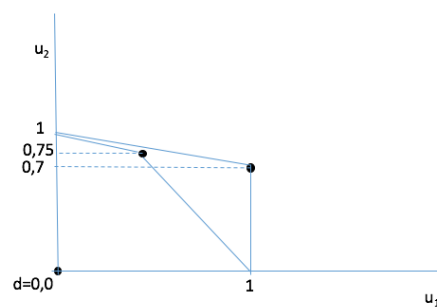
4.1 Critiques de A4

L'axiome le plus controversé est A4. Considérons les jeux suivants :



La solution de Nash est $(50, 10)$ dans chaque jeu (on peut le montrer facilement en utilisant uniquement les axiomes). Dans le second jeu, le joueur 1 reçoit le gain le plus élevé possible, tandis que le joueur 2 ne reçoit pas le gain maximal possible. Il est donc raisonnable que le joueur 2 réclame plus que 10, en soutenant que le joueur 1 devrait également faire un compromis.

Considérons les jeux suivants :



$$U_1 = co\{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (0,75, 0,75)\}$$

$$U_2 = co\{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 0,7)\}$$

On peut montrer que la solution de Nash est $(0,75, 0,75)$ dans U_1 et $(1, 0,7)$ dans U_2 .

Pour tout $u \in U_2$, il existe un point $v \in U_1 \setminus U_2$ tel que $v \gg u$ (sauf pour $(1, 0)$ et $(0, 1)$). Autrement dit, pour tout $u \in U_2$, il existe une allocation dans U_1 qui améliore strictement le bien-être des deux joueurs.

Il serait donc raisonnable qu'aucun joueur ne soit moins bien loti avec une allocation dans U_2 qu'avec une allocation dans U_1 . Néanmoins, avec la solution de Nash, la situation du joueur 2 se détériore.

L'axiome A4 implique que la solution ne dépend que de l'ensemble des issues sélectionnées et du point de désaccord. On peut éliminer autant d'issues possibles que l'on veut sans modifier la solution. Cependant, dans certaines situations, cela n'est pas raisonnable.

4.2 Fondements non coopératifs de la solution de Nash

La solution de Nash est une solution axiomatique d'un problème de négociation : elle est définie à partir d'un ensemble d'allocations réalisables et d'un point de désaccord, sans modéliser explicitement le processus stratégique menant à l'accord.

En revanche, le modèle de négociation alternée de Rubinstein (1982) propose une fondation non coopérative de la négociation. Deux joueurs se font des offres successives. À chaque période, un joueur propose un partage, que l'autre peut accepter ou refuser ; en cas de refus, la négociation se poursuit au tour suivant. Les joueurs ont une préférence pour le présent : ils préfèrent recevoir un euro aujourd'hui plutôt que demain.

Rubinstein montre que ce jeu admet un unique équilibre parfait en sous-jeux. Lorsque l'impatience des joueurs disparaît (les joueurs sont très patients), le partage atteint à l'équilibre converge vers la solution de Nash. Ainsi, la solution de Nash peut être interprétée comme la limite d'un équilibre stratégique d'un jeu non coopératif lorsque l'impatience disparaît.

Ce résultat fournit une justification stratégique à la solution de Nash : la solution n'est pas seulement normative, elle peut émerger comme l'issue d'un processus de négociation rationnel et décentralisé.

4.3 Application au marché du travail

Considérons un employeur (joueur 1) et un employé (joueur 2) qui considèrent l'opportunité de travailler ensemble. En cas d'accord, l'employé produit un bien de valeur v . L'employeur lui verse un salaire w qui doit être supérieur au salaire minimum, noté

$\bar{w}(< v)$. En cas de désaccord, les deux joueurs reçoivent 0 ($d_i = 0$ pour tout $i = 1, 2$). En cas d'accord sur un salaire w , les utilités sont :

$$u_1(w) = v - w, u_2(w) = w$$

Pour trouver le salaire obtenu à l'issue de la négociation de Nash, noté w^N , il faut résoudre :

$$\max_{w \in [\underline{v}, \underline{w}]} w(v - w)$$

Soit $f(w) = w(v - w)$. On obtient $f'(w) = -2w + v$ et $f''(w) < 0$. Ainsi f atteint un maximum global en $w^* = \frac{v}{2}$. Si $2\underline{w} < v$, alors $w^N = w^*$ et $w^N = \underline{w}$, sinon. On remarque que si le surplus produit est trop faible ($2\underline{w} > v$) l'employé reçoit le salaire minimum $\underline{w}$ et qu'une augmentation marginale de v (par exemple, grace à un gain de productivité) n'affecte pas l'utilité obtenue à l'issue du marchandage par le joueur 2 : seul le l'employeur bénéficie d'un gain de productivité.