Chapitre : Nombres

L'objectif de ce chapitre est de rappeler très rapidement les ensembles de nombres qui sont connus à l'entrée en première année de Licence et quelques propriétés élémentaires.

1 Les nombres

1.1 Les nombres entiers

Tout d'abord, nous avons les nombres entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

et les nombres entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, nous avons les opération élémentaires d'addition et multiplication : $+$ et $\times$.

On rappelle que, pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on dit que m divise n si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = mk$. On dit aussi que n est pair si 2 divise n ; sinon on dit que n est impair.

1.2 Les nombres rationnels

Afin de résoudre des équations de la forme $ax + b = 0$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, on introduit l'ensemble des nombres rationnels. Les nombres rationnels sont les nombres que l'on peut écrire comme une fraction $r = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers relatifs et $q \neq 0$. $r = \frac{p}{q}$ est alors l'unique solution (on dit aussi racine) de l'équation $qx - p = 0$.

Notons que si n est un entier non nul, on a $r = \frac{p}{q} = \frac{np}{nq}$. Ainsi on essayera toujours d'écrire un nombre rationnel sous forme irréductible $r = \frac{p}{q}$ où $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q sans diviseur commun autre que 1.

Exemple 1. La fraction $\frac{4}{-6}$ représente le même nombre que la fraction $\frac{-2}{3}$; cette seconde fraction est irréductible.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. On notera que la fraction $\frac{n}{1}$ représente le nombre entier n.

Les opérations $+$ et $\times$ s'étendent aux nombres rationnels. Dans $\mathbb{Q}$ on peut même diviser par un nombre rationnel non nul (on dit que $\mathbb{Q}$ est un corps). On notera $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble des nombres rationnels privé de 0.

1.3 Les nombres réels

On peut montrer que l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$ pour cela on est amené à considérer un ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{Q}$: c'est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Cette ensemble contient par exemple les nombres $\sqrt{2}$ (solution de l'équation précédente), π, e et $\ln 2$ qui ne sont pas rationnels.

Là encore, les opérations $+$ et $\times$ s'étendent aux nombres réels. Dans $\mathbb{R}$, on peut aussi diviser par un nombre réel non nul. On notera $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels privé de 0.

2 Propriétés et définitions

2.1 Puissances

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on définit des puissances avec exposant négatif

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Par convention si $x \neq 0$, on définit $x^0 = 1$.

Lorsque les expressions ci-dessous ont du sens, on rappelle des règles de calculs

- $x^{n+m} = x^n x^m$ et $x^{nm} = (x^n)^m$
- $(xy)^n = x^n y^n$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

On rappelle quelques formules classiques

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{et} \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

On rappelle aussi que pour tout nombre réel positif x et n entier naturel non nul, il existe un unique y réel positif tel que $x = y^n$. On note $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. On définit ainsi des puissances avec exposant rationnel pour les nombres réels positifs.

2.2 Ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui étend celle définie sur $\mathbb{Z}$. Ainsi on peut écrire $x \leq y$ pour deux nombres réels x et y. On définit alors $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels positifs ($x \geq 0$) et négatifs ($x \leq 0$).

On écrira $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. On rappelle les propriétés

- On a $x \leq x$.
- Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.
- Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

- Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x+z \leq y+t$.
- Si $x \leq y$ et $0 \leq z$ alors $xz \leq yz$.
- Si $x \leq y$ et $z \leq 0$ alors $xz \geq yz$.

2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2.1. Soit a et b deux nombres réels. On définit alors

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

En remplaçant $\leq$ par $<$, on définit de même $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$. On définit aussi les intervalles infinis

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

et de même, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ et $]-\infty,b[$. On a $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.

3 Symbole de sommation $\sum$

Si pour chaque entier i compris entre n et p, x_i désigne un nombre réel, la notation $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} x_i$ désigne la somme suivante

$$\sum_{i=n}^{p} x_i = x_n + x_{n+1} + \cdots + x_p$$

Il est important de noter que la lettre i utiliser pour numéroter les termes de la somme n'a pas de signification particulière et peut être remplacée par une autre lettre (on parle de variable muette). On a $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} x_i = \sum_{k=n}^{p} x_k$.

On peut rappeler quelques sommes classiques pour $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- pour $q \neq 1$ et 0, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.
- Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

On rappelle $n!$ désigne le **factoriel** de n et vaut $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. $\binom{n}{i}$ est appelé **coefficient binomial**.