TD1: Algèbre

1. **Somme ou produit**

2. **Développer et factoriser**

3. **Sommes « Σ »**

4. **Fonction factorielle, coefficient binomial**

TD1: Algèbre

1. Somme ou produit

Toutes les opérations mathématiques peuvent se ramener à deux opérations de base : l'addition et la multiplication. Une soustraction est considérée comme une somme. Une division est considérée comme un produit.

Soustraction : c'est juste une addition avec un nombre négatif. $\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$

Division : c'est une multiplication avec l'inverse. $\boldsymbol{a \div b = a \times \frac{1}{b}}$

Lorsqu'une expression comporte plusieurs opérations, comme par exemple: $7 + 4 \times 6$, on peut se demander s'il s'agit d'une somme ou d'un produit.

TD1: Algèbre

Méthode :
Pour savoir si une expression est une somme ou un produit, on regarde la dernière opération à effectuer en respectant les règles de priorités.

Règle de priorités :
On commence toujours par les calculs entre parenthèses, puis les puissances, les multiplications (ou les divisions) et on termine par les additions (ou soustractions).

Exemples :

$2 - 13 + 5 \times 4 = 2 - 13 + 20 = -11 + 20 = 9$: C'est une somme.

$(6 + 3 \times 4) \times (5 - 2) = (6 + 12) \times 3 = 18 \times 3 = 54$: C'est un produit

2. Développer et factoriser

Développer c'est transformer un produit en une somme :
Factoriser c'est transformer une somme en un produit :

- Pour développer on peut utiliser:

  - la **Distributivité simple:** $\boldsymbol{a\,(b + c) = ab + ac}$
  - la **Double-distributivité :** $\boldsymbol{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + db}$

- Pour factoriser, il faut trouver dans chaque terme un facteur commun.

Exemple:

$$5(\mathbf{1 + 2}\boldsymbol{x}) + (3x - 9)(\mathbf{1 + 2}\boldsymbol{x}) = (\mathbf{1 + 2}\boldsymbol{x})(5 + 3x - 9) = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} \mathbf{+ 1})(3x - 4)$$

TD1: Algèbre

On peut développer et factoriser en utilisant les identités remarquables :

Développer

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Factoriser

Exemples:

$(2x - 7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 - 28x + 49$ **Développer**

$25x^2 - 9 = (5x)^2 - 3^2 = (5x - 3)(5x + 3)$ **Factoriser**

TD1: Algèbre

Exercice 1:

1. Développer les expressions suivantes

a. $(2x+3)x^4$ **b.** $(3x + 2)(7 - x)$ **c.** $(4 - 7x)(4 + 7x)(x - 2)$

2. Développez les 3 identités remarquables pour vérifier leurs résultats.

Exercice 2: Factoriser les expressions suivantes

a. $6x + 9$ **b**. $(3+7x)^2 - (x+1)(3+7x)$ **c.** $25 - 36a^2$

d. $9x^2 - 30x + 25$ **e.** $(4x - 3)^2 - 1$ **f.** $(x + 4)(x - 6) + (-1 + x)(x - 6)$

TD1: Algèbre

Exercice 1:

1. Développer les expressions suivantes

a. $(2x+3)x^4 \;=\; 2x^5 + 3x^4$

b. $(3x\;+\;2)(7\;-\;x) = \;21x\;-3x^2 + 14\;-2x\;=\;-3x^2+19x+14$

c. $(4-\;7x)(4\;+\;7x)(x\;-2) = (16\;-49x^2)(x-\;2)$

$= 16\text{x} - 32 - 49x^3 + 98x^2$

$= -49x^3 + 98x^2 + \;16x\;-\;32$

2. Développez les 3 identités remarquables pour vérifier leurs résultats.

$$(a\;+\;b)^2\;=\;(a\;+\;b)(a+b)\;=\;a^2\;+\;ab\;+\;ba\;+\;b^2\;=\;a^2\;+\;2ab\;+\;b^2$$

$$(a\;-\;b)^2\;=\;(a\;-\;b)(a-b) = \;a^2\;-\;ab\;-\;ba\;+\;b^2\;=\;a^2\;-\;2ab\;+\;b^2$$

$$(a-b)(a\;+\;b) = \;a^2\;+\;ab\;-\;ba\;-\;b^2\;=\;a^2\;-b^2$$

TD1: Algèbre

Exercice 2: Factoriser les expressions suivantes

a. $6x + 9 = 3 \times 2x + 3 \times 3 = 3(2x + 3)$

b. $(3 + 7x)^2 - (x + 1)(3 + 7x) = (3 + 7x)[(3 + 7x) - (x + 1)] = (3 + 7x)(6x + 2)$

c. $25 - 36a^2 = 5^2 - (6a)^2 = (5 - 6a)(5 + 6a)$

d. $9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = (3x - 5)^2$

e. $(4x - 3)^2 - 1 = [(4x - 3) - 1]\,[(4x - 3) + 1] = (4x - 4)(4x - 2)$

f. $(x + 4)(x - 6) + (-1 + x)(x - 6) = (x - 6)(x + 4 - 1 + x) = (x - 6)(2x + 3)$

3. Sommes

Le symbole Σ (lettre grecque sigma capitale) signifie « somme ». Ce symbole somme est utilisé comme suit :

$$\sum_{i=m}^{i=n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Se lit : somme pour i variant de m à n des $\boldsymbol{a_i}$.

Exemples:

$$\sum_{k=3}^{k=6} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86$$

Dans l'autre sens:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 30 = \sum_{k=1}^{k=15} 2k$$

TD1: Algèbre

Exercice 3: Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{p=0}^{p=7} (-\mathbf{1})^{p} =$$

$$\sum_{k=3}^{k=6} (\mathbf{2}^{5-k}) =$$

Exercice 4: Écrire, à l'aide du symbole somme, les sommes suivantes :

$$2^3 + 2^4 + \ldots. + 2^{12} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots.. + \frac{1}{1024} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots. + \frac{10}{1024} =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

TD1: Algèbre

Exercice 3: Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{p=0}^{p=7}(-1)^p = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7$$

$$= 0$$

$$\sum_{k=3}^{k=6}(2^{5-p}) = (2^{5-3}) + (2^{5-4}) + (2^{5-5}) + (2^{5-6})$$

$$= 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1}$$

$$= 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

TD1: Algèbre

Exercice 4: Écrire à l'aide du symbole somme les sommes suivantes :

$$2^3 + 2^4 + \dots + 2^{12} = \sum_{k=3}^{k=12} 2^k$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024} = \sum_{k=1}^{k=10} \frac{1}{2^k}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024} = \sum_{k=1}^{k=10} \frac{k}{2^k}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

TD1: Algèbre

4. Fonction factorielle, coefficient binomial

La fonction factorielle d'un nombre entier naturel a se note $a!$, et se calcule ainsi :

$$a! = a \times (a-1) \times (a-2) \times \ldots \times 1$$

Exemples: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ $\quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Remarque : la factorielle $a!$ correspond au nombre de permutations que l'on peut réaliser à partir d'une liste ordonnée de a éléments

À savoir : $0! = 1$.

TD1: Algèbre

Le coefficient binomial $\binom{a}{b}$, défini pour tout entier naturel a et tout entier naturel b inférieur ou égal à a, se lit « b parmi a » et se calcule ainsi :

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!\,b!} = \frac{a\times(a-1)\times(a-2)\times \ldots((a-b+1)}{b\times(b-1)\times(b-2)\times\cdots 1}$$

Exemples:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10$$

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{(9-6)!\,6!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 84$$

Remarque : le coefficient binomial $\binom{a}{b}$, correspond au nombre de combinaisons composées de b éléments que l'on peut créer à partir de l'ensemble a.

TD1: Algèbre

Exercice 5: Calculer (sans la calculatrice !)

1. $5!$ **2.** $\binom{10}{1}$ **3.** $\binom{6}{2}$ 4. $\binom{7}{7}$

Exercice 6:

1. Combien d'anagrammes au total (ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres du mot CLAMER ?

2. Combien de groupes de 3 élèves peut-on constituer dans une classe de 8 élèves ?

TD1: Algèbre

Exercice 5: Calculer (sans la calculatrice !)

1. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

2. $\binom{10}{1} = \dfrac{10!}{9!\,1!} = \dfrac{10}{1} = 10$

3. $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{4!\,2!} = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

4. $\binom{7}{7} = \dfrac{7!}{0!\,7!} = 1$

TD1: Algèbre

Exercice 6:

1. Combien d'anagrammes au total (ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres du mot CLAMER ?

Il y a 6 lettres dans le mots CLAMER. $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$
On peut donc faire 720 anagrammes avec les 6 lettres du mots CLAMER.

2. Combien de groupes de 3 élèves peut-on constituer dans une classe de 8 élèves ?

On choisit 3 parmi 8, cela revient à calculer $\binom{8}{3}$. $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

On peut constituer 56 groupes de 3 élèves dans une classe de 8 élèves.